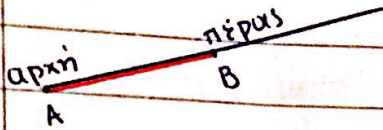


Προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα

14.05.2019

Ορισμός: Με τον όρο προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB εννοούμε το ευθ. τμήμα AB του οποίου το A θεωρείται ως αρχή και το B ως πέρας.



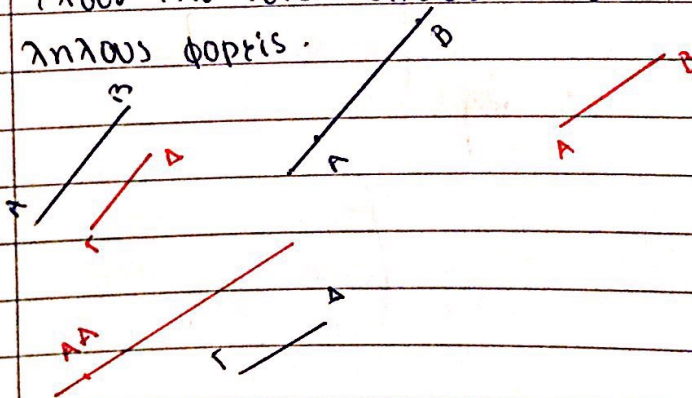
Μήκος του προ/νου ευθ. τμήματος AB είναι το μήκος του ευθ. τμήματος AB .

Συμβολισμός: (AB)

Διεύθυνση:

Ορισμός: καλούμε φορά του προσ. ευθ. τμήματος AB την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται.

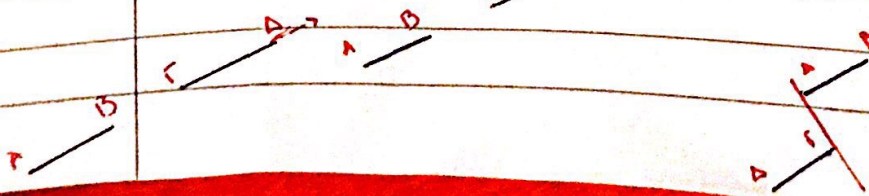
Ορισμός: Δύο προσανατολισμένα ευθ. τμήματα $AB, ΓΔ$ λέμε ότι έχουν την ίδια διεύθυνση αν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς.



Ορισμός: Δύο προσανατολισμένα ευθ. τμήματα $AB, ΓΔ$ λέμε ότι έχουν τον ίδιο φορέα αν-ν:

i) έχουν την ίδια διεύθυνση και

ii) ~~οι κεντρικοί τους φορείς~~ ~~έχουν~~ ~~παρόμοιους φορείς~~, τότε



Διανύσματα

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των προτίμων ευθ. τμημάτων ως εξής:

Τα προτίμα ευθ. τμήματα $AB, \Gamma\Delta$ καλούνται ισοδύναμα αν-ν

(i) $(AB) = (\Gamma\Delta)$ ίδιου μήκους

(ii) ίδια διεύθυνση και

(iii) ίδια φορά

Ορισμός: κάθε κλάση ισοδυναμίας καλείται διάνυσμα.

Έστω το πρόμα ευθ. τμήμα AB . Η κλάση ισοδυναμίας του είναι το σύνολο $\{\Gamma\Delta / \Gamma\Delta$ πρόμα ευθ. τμήμα που έχει ίδιο μήκος, ίδια διεύθυνση και ίδια φορά με το $AB\}$



Χαρακτηρίσω τα διανύσματα:

κάθε διάνυσμα έχει μήκος, διεύθυνση και φορά κατά του τυχαίου αντιπροσώπου του.

Συμβολισμός: Το διάνυσμα με αντιπρόσωπο το πρόμα ευθ. τμήμα AB συμβολίζεται με $\vec{AB}$ ή $\overrightarrow{AB}$

Τα διανύσματα συμβολίζονται με $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Μήκος: $\|\vec{a}\|$, όπου $\|\vec{a}\| \geq 0$ με $\|\vec{a}\| = 0$ (όταν τα άκρα του ε.τ. ταυτίζονται)

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν-ν έχουν ίδιο μήκος, ίδια διεύθυνση και ίδια φορά

• $\vec{AA}$

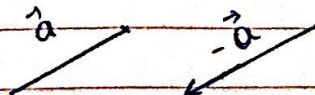
• $\vec{BB}$

$\vec{AA} = \vec{BB} = \dots$

• Μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ είναι το $\vec{AA} = \vec{BB} \dots$

Ορισμός: καλούμε αντίθετο του διανύσματος $\vec{a}$ το ~~επόμενο~~ διάνυσμα $\vec{b}$ το οποίο έχει ίδιο μήκος, ίδια διεύθυνση με το $\vec{a}$ και αντίθετη φορά με το $\vec{a}$.

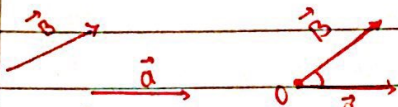
Συμβολίζεται με $-\vec{a}$



Παρατήρηση: (i) $-\vec{0} = \vec{0}$

(ii) $-\vec{a} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Γωνία διανυσμάτων: Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$ καλούμε γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$ την $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$



$$\vec{a} = \vec{OA}$$

$$\vec{b} = \vec{OB}$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$$

▶ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ έχουν την ίδια φορά

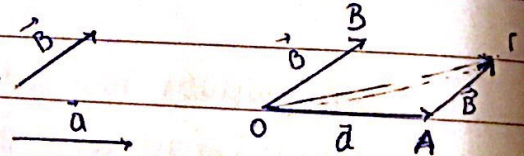
▶ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ έχουν αντίθετη φορά

▶ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ορθογώνια

Συμβολίζω με V_3 (αντίστοιχα V_2) το σύνολο των διανυσμάτων του χώρου (αντίστοιχα του επιπέδου)

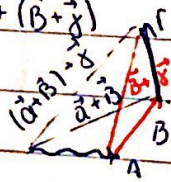
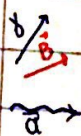
Πράξεις στο $V_3(V_2)$:

(+) Πρόσθεση: $V_3 \times V_3 \rightarrow V_3$, $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b} = \vec{or}$



Ιδιότητες πρόσθεσης: (i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



(iii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

(iv) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

Διαφορά διανυσμάτων: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: $\mathbb{R} \times V_3 \rightarrow V_3$

$$(\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda \vec{a}$$

Το διάνυσμα $\lambda \vec{a}$ έχει:

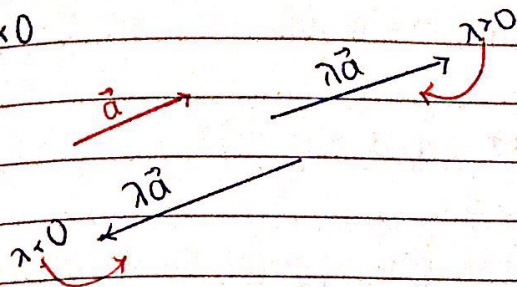
$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

i) Μήκος $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$

ii) έχει διεύθυνση, τη διεύθυνση του $\vec{a}$

iii) έχει φορά, τη φορά του $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$ και αντίθετη φορά του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$



Ιδιότητες βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

(i) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(ii) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(iii) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(iv) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $(V_3, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$ (μπορεί και τα δυο)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$$

Γραμμικοί συνδυασμοί: είναι κάθε διάνυσμα της μορφής:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \text{ όπου } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in V_3$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$$

Γραμμική εξάρτηση:

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ καλούνται δρ. εξαρτημένα (ι.ε.) αν-ν υπάρχει $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

Γραμμική ανεξαρτησία:

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ καλούνται δρ. ανεξάρτητα (Γ.Α) αν-ν δεν είναι Γ.Ε. δηλαδή
$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

Παρατηρήσεις: (i) $\vec{a}$ Γ.Ε $\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$

(ii) $\vec{a}$ Γ.Α $\Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) Αν $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ είναι Γ.Ε τότε $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l$ είναι Γ.Ε. (για τυχόντα $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l$)

(ii) Αν $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_{k+l}$ είναι Γ.Α, τότε $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ είναι επίσης Γ.Α.

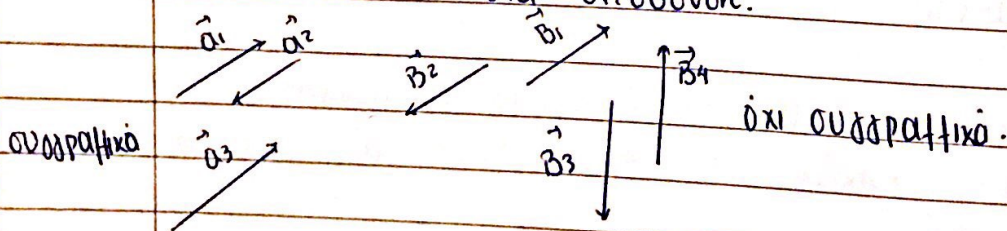
ΠΡΟΤΑΣΗ: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ είναι Γ.Ε. αν-ν κάποιο από αυτά δράφεται ως δρ. συνδιασμός των υπολοίπων.

Ορισμός: Το διάνυσμα $\vec{a}$ καλείται μοναδιαίο αν-ν $\|\vec{a}\| = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε το διάνυσμα $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$ είναι μοναδιαίο.

Πράγματα: $\left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{a}\|} \right| \|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \|\vec{a}\| = 1$.

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ καλούνται συσφραμμικά όταν έχουν την ίδια διεύθυνση.



Πρόταση: Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε. αν-ν είναι συσφραμμικά (δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση)

Πόρισμα: Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Α. αν-ν δεν είναι συσφραμμικά (δηλαδή δεν έχουν την ίδια διεύθυνση)

Απόδειξη: Έστω ότι $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε. δηλαδή υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$ και $|\lambda| + |\mu| > 0$.

Υποθέτω ότι $\lambda \neq 0$. $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda \vec{a} = -\mu \vec{b}$

$$\xrightarrow{\lambda \neq 0} \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{a}) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \mu \vec{b} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right) \vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) \vec{b}$$

Αντίστροφα: Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ είναι συσχετισμένα δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση. Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$, τότε $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε.

Υποθέτω ότι $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$

Τα $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$, $\frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b}$ είναι μοναδιαία και έχουν την ίδια διεύθυνση

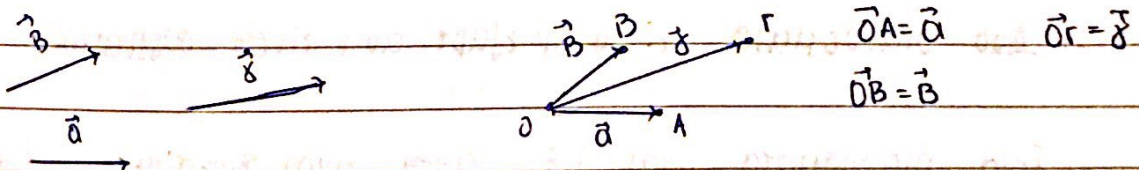
Αν έχουν την ίδια φορά τότε $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b} \Leftrightarrow \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} + \left(-\frac{1}{\|\vec{b}\|}\right) \vec{b} = \vec{0}$

→ Γ.Ε.

Αν έχω αντίθετη φορά, τότε :

$$\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = -\frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b} \Rightarrow \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} + \frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \text{Γ.Ε.}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ καλούνται συνεπίπεδα αν-ν αντιπροσώπων τους με κοινή αρχή περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Δηλαδή τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα αν-ν τα σημεία O, A, B, Γ είναι συνεπίπεδα.



ΠΡΟΤΑΣΗ: Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε. αν-ν είναι συνεπίπεδα

ΠΟΡΙΣΜΑ: Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Α. αν-ν δεν είναι συνεπίπεδα.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Τρία διανύσματα του $\mathbb{V}_3$ (επιπεδογενήτρια) είναι πάντοτε Γ.Ε.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ξούω ότι $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε. τότε υπάρχουν $\lambda, \mu, \chi \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \chi \vec{\gamma} = \vec{0} \quad |\lambda| + |\mu| + |\chi| > 0$$

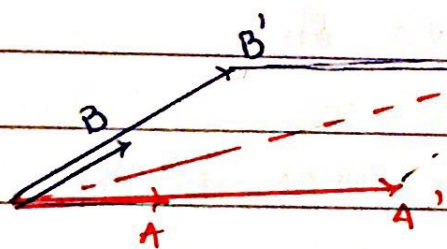
Υποθέτω ότι $\chi \neq 0$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \chi \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \chi \vec{\gamma} = -\lambda \vec{a} - \mu \vec{b} \Leftrightarrow \dots \Rightarrow \vec{\gamma} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}, \text{ όπου}$$

$$\lambda_1 = -\lambda / \chi \quad \lambda_2 = -\mu / \chi$$

$$\vec{\gamma} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$$

$\vec{a}$



$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OA'} = \lambda_1 \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OB'} = \lambda_2 \vec{b}$$

O, A, B, Γ συνεπίπεδο

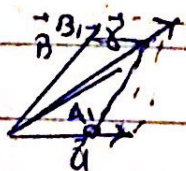
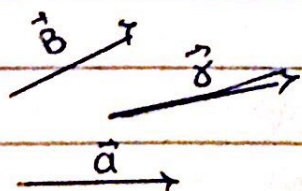
$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδο

Αντίστροφα: Ξούω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδο.

Θα δείξω ότι είναι Γ.Ε.

Αν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε. τότε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε.

Υποθέτω ότι $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Α.



$$\vec{\gamma} = \vec{O\Gamma} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ Γ.Ε.}$$